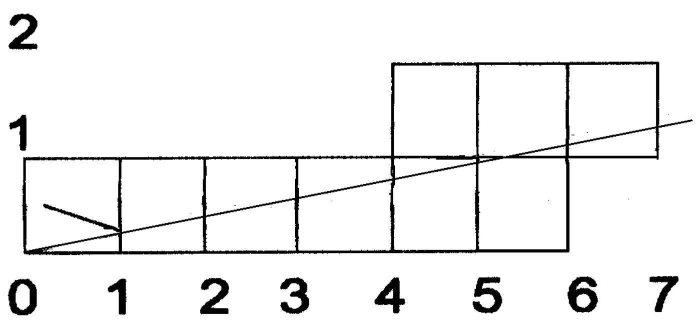
Aufgabe 2:
Die Kugel werde z.B an der rechten Bande reflektiert. Wie denken uns den Billardtisch an seiner rechten Bande gespiegelt. Dann kann man sich vorstellen, dass sich die Kugel geradlinig weiter bewegt. Wir führen ein Koordinatensystem ein (Zeichnung):



Die Kugel fällt in ein Loch, wenn sie erstmals einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten erreicht. An den folgenden Punkten trifft die Kugel jeweils die rechte (gespiegelte) Bande:
(1; 19/96), (2; 2*19/96), (3, 3*19/96),...
Da 19 und 96 teilerfremd sind, liegt das erste Loch an der Stelle (96; 19), Auf ihrem Weg durch das Gitternetz hat die Kugel 95 senkrechte Linien und 18 waagerechte Linien überquert, d.h. sie ist 113-mal reflektiert worden.

Aufgabe 3

Die 100 Stammbrüche seien wie folgt numeriert: a_1 , a_2 , ... , a_{100} . O.B.d.A. ersetzen wir das erste Paar a_1 , a_2 durch den Term $a_1+a_2+a_1a_2$. Wegen $1+a_1+a_2+a_1a_2 - 1 = (1+a_1)(1+a_2) - 1$ ist der Term $a_1+a_2+a_1a_2$ äquivalent zum um 1 verminderten Produkt $(1+a_1)(1+a_2)$.

Analog können wir nun etwa die Zahlen $(1+a_1)(1+a_2) - 1$ und a_3 ersetzen durch die Zahl $(1+a_1)(1+a_2) - 1 + a_3 + a_3[(1+a_1)(1+a_2) - 1] = (1+a_1)(1+a_2) - 1 + a_3 - a_3 + (1+a_1)(1+a_2)a_3 = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) - 1$ (nach Vereinfachung und Ausklammern) usw.

Offenbar erhalten wir auf diese Weise nach 99maliger Wiederholung die Zahl

$$P = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \cdot ... \cdot (1+a_{100}) - 1 = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3}) \cdot ... \cdot (1+\frac{1}{100}) - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{101}{100} - 1 = 101-1 = \underline{100} \; .$$