Lösungen FÜMO 9 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 (Lösung): (5 Punkte)

Der Anfangspreis sei z. Jeder spätere Preis hat die Form $z \cdot 3^j \cdot 5^k$ mit gleicher Gesamtzahl j+k von Dreier- und Fünferfaktoren (j+k = Anzahl der vergangenen Monate). Das Verhältnis zweier Preise hat die Form $v = \frac{z \cdot 3^{j_1} \cdot 5^{k_1}}{z \cdot 3^{j_2} \cdot 5^{k_2}}$. Nach Kürzen von z und den Dreier- bzw. Fünfer-Faktoren bleiben gleich viele Faktoren im Zähler und Nenner übrig: $v = \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ oder $v = \frac{5^n}{3^n} = \left(\frac{5}{3}\right)^n$. Sortiert man die sieben entstandenen Preise der Größe nach, so entsteht jeder Nachfolger aus dem Vorgänger durch Multiplikation mit einer Potenz von $\frac{5}{3}$.

Der größte Preis entsteht aus dem kleinsten also durch Multiplikation mit mindestens sechs Faktoren $\frac{5}{3}$.

$$\left(\frac{5}{3}\right)^6 \approx 21{,}43 > 21$$

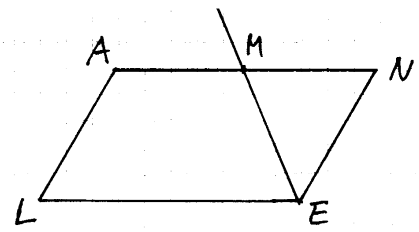
Aufgabe 2 (Lösung): (6 Punkte)

a) Wir betrachten das Dreieck LET mit den Innenwinkeln $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\varepsilon}{2}$ und τ.

Im Parallelogramm gilt $\lambda + \varepsilon = 180°$. Aus der Winkelsumme in ΔLET folgt somit $\tau = 90°$.
Die Winkelhalbierenden w_λ und w_ε schneiden sich also rechtwinklig. Analoges gilt für die anderen Paare der Winkelhalbierenden. Daher folgt: Das Viereck **KURT ist ein Rechteck**.
Bemerkung: Ist LENA eine Raute (was nach Aufgabenstellung ausgeschlossen ist), so entartet KURT zum Punkt.

b) Falls **eine Seite** des Parallelogramms LENA **doppelt so lang ist wie die andere**, so liegen zwei Ecken des Rechtecks KURT auf den langen Seiten des Parallelogramms LENA.

Beweis: Sei etwa $\overline{AN} = 2\overline{EN}$. Sei M die Mitte der Strecke [AN], dann ist Dreieck MEN gleichschenklig mit Spitze N, also $\angle EMN = \angle NEM$.
Ferner gilt : $\angle MEL = \angle EMN$ (Z-Winkel an Parallelen).
Es folgt: $\angle NEM = \angle MEL$, also ist [EM Winkelhalbierende von ε.
Analog geht w_α durch M, also gilt M=T.
Ebenso beweist man, dass U mit der Mitte der Seite [LE] zusammenfällt.



c) Wenn **LENA ein Rechteck** ist, dann ist KURT ein Quadrat.

Beweis: Falls LENA Rechteck ist, besitzt LENA zwei Symmetrieachsen, die KURT "erbt". KURT ist somit eine Raute. Nach a) ist KURT auch Rechteck, also Quadrat.

Aufgabe 3 (Lösung): (4 Punkte)

Von jeder der n Ecken des n-Ecks gehen n-3 Diagonalen weg. Bei dieser Betrachtungsweise wird jede Diagonale doppelt gezählt. Die Anzahl d der Diagonalen eines n-Ecks beträgt also $d = \frac{n(n-3)}{2}$ (*)

a) d = 3n. Setzt man dies in obige Gleichung (*) ein, ergibt sich $3n = \frac{n(n-3)}{2}$ bzw. 6n = n(n-3).

Division durch n (ungleich Null) ergibt n - 3 = 6 bzw. **n = 9.**

b) n = 3d. Setzt man (*) in diese Gleichung ein, erhält man nach Umformen 2n = 3n(n-3).

Division durch n (ungleich Null) ergibt 2 = 3(n-3) bzw. **n =** $\frac{11}{3}$. Zahl**. Es gibt keine solchen n-Ecke.**