

Lösungen FÜMO 16 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 (Lösung)

Man betrachtet zunächst die Nummern der Punkte $P(x;0)$ auf der x-Achse:

Ist x gerade, so gilt:

$N = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (x-1) + 2 \cdot x$ (ohne Achsen) + $2 \cdot x/2$ (beide Achsen) + 1 (der erste Punkt hat die Nummer 0) = $2 \cdot (x+1) \cdot x/2 + x + 1 = (x+1) \cdot x + (x+1) = (x+1)^2$.

Ist x ungerade, so kann man schreiben: $x = (x-1) + 1$. Die Nummer N' für die gerade Zahl $(x-1)$ beträgt dann $(x-1+1)^2 = x^2$, also hat x die Nummer $N = N' + 1 = x^2 + 1$.

Analog erhält man die Nummern der Punkte $P(0;y)$ auf der y-Achse.

5

Nummer N der Punkte auf der x-Achse:		Nummer N der Punkte auf der y-Achse:	
x gerade	$N=(x+1)^2$	y ungerade	$N=(y+1)^2$
x ungerade	$N=x^2+1$	y gerade und $y>0$	$N=y^2+1$

a) $44^2 = 1936$ $45^2 = 2025 \triangleq x = 44$ $N = 2007 \triangleq (44 / 25-7) = (44 / 18)$

b) $(16 / 2007) \triangleq N = (2007 + 1)^2 - 16 = 4032064 - 16 = 4032048$

Aufgabe 2 (Lösung)

Es gilt: $S(2k-1) = k$ und $S(2k) = -k$

1. Fall: $a = 2n$ gerade und $b = 2m$ gerade

$S(2n) + S(2m) + S(2n+2m) = -n - m - (n+m) < 0 \neq 2007$ bzw. 2008
für $n \in \mathbb{IN}$ und $m \in \mathbb{IN}$

2. Fall: $a = 2n-1$ ungerade und $b = 2m-1$ ungerade

$S(2n-1) + S(2m-1) + S(2n+2m-2) = n + m - (n+m-1) = 1$ keine Lösung

3. Fall: $a = 2n-1$ ungerade und $b = 2m$ gerade

$S(2n-1) + S(2m) + S(2n+2m-1) = n - m + (n+m) = 2n$

$2n \neq 2007$ **keine Lös.**; aber $2n = 2008$; $n = 1004$ liefert Lösungspaare $(1004 ; m)$
für $n \in \mathbb{IN}$ und $m \in \mathbb{IN}$

4. Fall: $a = 2n$ gerade und $b = 2m-1$ ungerade

$S(2n) + S(2m-1) + S(2n+2m-1) = -n + m + (n+m) = 2m$

$2m = 2007$ in \mathbb{IN} nicht lösbar

$2m = 2008 \Rightarrow m = 1004$ liefert Lösungspaare $(n; 1004)$

\Rightarrow Kein Zahlenpaar erfüllt die Bedingung $S(a) + S(b) + S(a+b) = 2007$

\Rightarrow Alle Zahlenpaare $(n; 1004)$ und $(1004; m)$ erfüllen die Bedingung

$S(a) + S(b) + S(a+b) = 2008$

5

Aufgabe 3 (Lösung)

Die Seitenlänge des Quadrats sei a.

Durch die Parallelen zu AD und CF

entstehen kongruente Rauten,

d.h. $d(E, FD) = a:4$

B ist der Schnittpunkt der Diagonalen

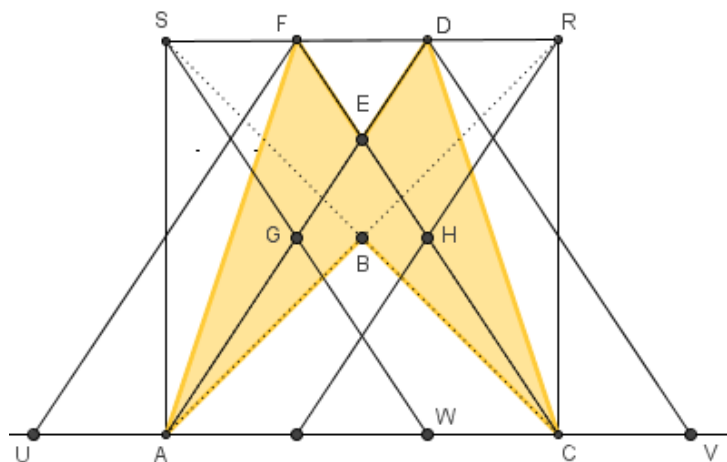
des Quadrats $\rightarrow d(B, AC) = a:2$

Für den Flächeninhalt A des M's gilt:

$A = A_{ACRS} - A_{ACB} - 2 \cdot A_{ACRD} - A_{DEF}$

$= a^2 - \frac{1}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{24}a^2$

$= \frac{3}{8}a^2 = 37,5\% \text{ von } a^2$



5